数理解析研究所講究録
137巻 1972年 1-37

最近の有限群論における諸問題
(鈴木通夫教授の講演)

阪大 理　八牧宏美

これは鈴木教授による講演の極めて粗い近似報告である。内容に誤りがあれば筆者の責任である。最近のショルツ，ゴルドシュミット，パロット　の結果について話された。

I. ある2重可移群について(ショルツ)

2重可移群を固定群の構造から特徴づける問題についてはアシバッハ，ベンダー　などによって興味ある結果が得られている。ここではショルツの定理の略証を述べよう。

定理　有限群Gを集合Ω上の可移置換群でΩの元αの固定群G_αが$\Omega-\{\alpha\}$上の偶数位数の正則正規部分群Qを含むとする。このとき次の(i)又は(ii)が成立する。

(i)　Gは奇数個の元からなる有限体上の半線型変換群の部分群である。

(ii)　G は $L_2(q)$, $U_3(q)$, $S_z(q)$, の自己同型群の部分群である。ただし，q は偶数である。

注意．定理の条件は換言すれば G が階数1の分離BN組をもつことと同値であり，(ii)の群はいずれも Ω として G のシロー2-部分群の集合をとればよい。Q が奇数位数の場合にはすでにへリング，キャンター，ザイツの結果があるのでこの定理とあわせれば1文字の固定群が正則正規部分群をもつ可移置換群は完全に分類されたことになる。証明の根本方針は Ω の元 α，β に対して2文字の固定群 $G_{\alpha\beta}$ の適当な部分群 X をとりその中心化群 $C(X)$ を X の固定する文字の集合上に作用させ帰納法をつかうことである。

証明に必要な一般的補題をいくつか述べよう。補題1の証明は長くかつ幾々の定理の証明に重要な役目を果しているそうである。

補題1　有限群 G が位数2の元 t を含むとする。このとき t の G に関する $C_G(t)$ における弱閉 $V(ccl_G(t);C_G(t))$ が可換群ならば，$\langle t^G\rangle/Z(\langle t^G\rangle)\cong G_0\times G_1\times\cdots\cdots\cdots\times G_n$。ただし，$G_0$ は2－巾零であり，$i>0$ に対して G_i は $L_2(q)$, $U_3(q)$ 又は $S_z(q)$ のいずれかと同型となる。

これを適用することによって次の補題が得られる。

補題2　有限群 G が集合 Ω 上の可移置換群であるとし，G_α

$(\alpha\in\Omega)$ が位数2中の半正則正規部分群 Q を含めば定理の結論が成立する。

証明 S を G_α のシロー2-部分群で Q を含むものとすれば Q は $Z(S)$ の位数2の元 t を含む。t は Ω 上 α のみを固定するから $C_G(t)\subset G_\alpha$。$s\in C_G(t)$ かつ $s\sim t$ とすれば s は α のみを固定するから s と t は G_α で共役となる。$G_\alpha\triangleright Q$ より，$s\in Q$。s は G_α のあるシロー2-部分群の中心に入る。従って $\langle t^G\rangle\cap C_G(t)$ は可換群となるから補題1を適用すればよい。

補題3. 有限群 G の位数2の自己同型を τ とする。$C_G(\tau)$ が唯一つの位数2の元 t を含めば，$\langle t^G\rangle$ は基本可換群であるか又は $tO(G)$ は $G/O(G)$ の唯一つの位数2の元である。

証明 S を $C_G(\tau)$ のシロー2-部分群とする。仮定より S は巡回群又は一般四元数群である。S が G のシロー2-部分群ならばバーンサイド，ブラウアー・スズキの結果によって $G\triangleright\langle t\rangle O(G)$ となる。だから S は G のシロー2-部分群でないと仮定してよい。従って位数 $2|S|$ の τ-不変2-群 $S_1=\langle S, x\rangle$ が存在して $\tau x\tau=xy$，$y\in S$ となる。$x^{\tau^2}=x=(xy)^\tau=xy(y^\tau)$，$y\in C_G(\tau)$ より $y^2=1$。$y=1$ とすれば $x\in C_G(\tau)$ となって S のえらび方に矛盾する。従って仮定より $y=t$，$\tau^x=\tau t$ より τ と τt は $C_G(t)$ で共役。$t^G\cap C_G(\tau)=\{t\}$ だから $s\in t^G-\{t\}$ ならば $s\neq s^\tau$，また一方，

$\langle s, s^{\tau}\rangle$ は τ-不変である。$u = s(s^{\tau})$ とおこう。$o(u)$ を奇数と仮定する。$\langle s, s^{\tau}\rangle$ の位数2の元は奇数個だから τ は $\langle s, s^{\tau}\rangle$ の位数2の元 t を固定する。$u^{t\tau} = u$, $\tau^{x} = \tau t$ より $u^{x^{-1}} \in C_G(\tau)$。一方 $(xux^{-1})^{t} = (xux^{-1})^{-1}$ だから，$xux^{-1} \in C_G(\tau) \subset C_G(t)$ に矛盾する。$o(u)$ を偶数と仮定する。$u^{\tau} = u^{-1}$ より τ は $\langle u\rangle$ の位数2の元 t と交換可能，とくに $s, s^{\tau} \in C_G(t)$。従って $\langle t^G\rangle$ は基本可換群となる。

補題4（アルペリン）　G を有限群，V を G の四元部分群で $V \cap O_2(G) = \{1\}$ となるものとすれば，G は位数2の元 t で，$cl_G(t) \cap V \neq \phi$ かつ $C_V(t) = 1$，を満たすものを含む。

さて，我々の定理の証明に入ろう。G の位数についての帰納法で行う。G が自明でない可解正規部分群 N を含めば Q の N への作用によって G は定理（i）の群となることが容易にわかるので，以下，G はこのような正規部分群 N を含まないと仮定してよい。

$\alpha, \beta \in \Omega$ に対して $G_\alpha = G_{\alpha\beta}Q$，$G_{\alpha\beta} \cap Q = \{1\}$ である。$K = G_{\alpha\beta}$ とおけばベンダーの定理によって $|K|$ は偶数としてよく，さらに補題2より $O_2(Q) = \{1\}$ である。$x \in K$ に対して，

　　Ω_x　x の固定する文字の集合，

　　L_x　Ω_x の大域的固定群，

　　N_x　$\langle C_Q(x)^{L_x}\rangle$

K_x　Ω_x のすべての文字の固定群

とおけば $L_x \rhd N_x$，$L_x \rhd K_x$ となる。さらに L_x/K_x は帰納法の仮定をみたすことも容易にわかる。なお $L_x = C_G(x)$ とおいてもこの定理の証明は正しいようである。また証明もやや簡単になるように思われる。

我々の仮定より $\Omega = \{\alpha\} \cup \{\beta^Q\}$ である。$a \in Q$ に対して，$\beta^a \in \Omega_x$ とすれば $\beta^{ax} = \beta^a = \beta^{x \cdot a^x} = \beta^{a^x}$，一方 Q は $\Omega - \{\alpha\}$ 上正則であるから $a = a^x$，すなわち $a \in C_Q(x)$，従って $\Omega_x \subset \{\alpha\} \cup \{\beta^{C_Q(x)}\}$ が得られる。故に，

(1)　$\Omega_x = \{\alpha\} \cup \{\beta^{C_Q(x)}\}$.

$|\Omega_x| > 2$ と仮定すれば G_β は Q と共役な部分群 Q_1 を含む。(1)より $\langle C_Q(x), C_{Q_1}(x) \rangle$ は Ω_x 上2重可移となるので $N_x = \langle C_Q(x), C_{Q_1}(x) \rangle$，さらに $[C_Q(x), K_x] \subset Q \cap K_x = \{1\}$，従って，

(2)　$|C_Q(x)| = 1$，$|\Omega_x| = 2$，又は

$|\Omega_x| > 2$，N_x は Ω_x 上2重可移，$[N_x, K_x] = \{1\}$，

$L_x = (K \cap L_x) N_x$.

Q のシロー2-部分群が唯一つの位数2の元 s をもつと仮定しよう。$|\Omega|$ は奇数かつ $G_\alpha \rhd Q$ より s は G のあるシロー2-部分群の中心に入る。$g \in G$，$[s, s^g] = \{1\}$ とすれば $\Omega_s = \{\alpha\}$ より $\Omega_{s^g} = \{\alpha\}$，ゆえに $g \in G_\alpha$，さらに $Q \lhd G_\alpha$ より $Q = Q^g$，$O(Q)^g = O(Q)$。一方 s は $Q/O(Q)$ の唯一つの位数2の

元だから $s^g = su$, $u \in O(Q)$ とかける。従って $1 = (s^g)^2 = susu$ より $sus = u^{-1}$。$[s, s^g] = 1$ より $[s, u] = 1$，すなわち $u = 1$ となる。これは s と交換可能な位数2の元で s と共役なものは s に限ることを示している。つまり s は G のあるシロー2-部分群の中で孤立していることである。従って，グラーバーマンの Z^*-定理によって $G \triangleright \langle s \rangle O(G)$ となるから我々の仮定に反する。次のことがわかった。

(3)　Q のシロー2-部分群は巡回群でも一般四元数群でもない。

さて，S を $K = G_{\alpha\beta}$ のシロー2-部分群とする。S が巡回群であると仮定しよう。$\Omega_Q = \{\alpha\}$ だから任意の $g \in G$ に対して $S^g \cap Q = \{1\}$ となる。$S = \langle x \rangle$ として S を Q の G における剰余類の集合 Ω^* 上で表現する。$Qgx = Qg$ とすれば，$x \in Q^g \cap S = \{1\}$ だから x は Ω^* 上で同じ長さ $|S|$ の巡回置換の積でかける。従って，$(G:Q)/|S| = (G:G_\alpha)|K|/|S|$ は奇数だから x は奇置換となる。一方 $y \in Q - \{1\}$ とすると y は $\Omega - \{\alpha\}$ 上半正則であるから $Q^g \neq Q$ となる $g \in G$ に対して $y \notin Q^g$ となる。$G_\alpha = N_G(Q)$ より y は G_α における Q の剰余類をすべて固定する。ところが，$g \notin G_\alpha$ に対して $Q^g \cap Q = \{1\}$，よって $Qgy \neq Qg$。つまり y は $G - G_\alpha$ における Q の剰余類は固定しない。y を Q の位数2巾の元とすれば (3)

より $o(y)$ は Q のシロー2-部分群の位数より本当に小さい。従って Ω^* 上 y の長さ $o(y)$ なる巡回置換の数は偶数個である。故に Q のすべての位数2中の元は Ω^* 上偶置換として表現される。そこで $G > O^2(G)$ より帰納法の仮定を $O^2(G)$ に使えば定理(ii)が得られる。従って以下において我々は，

(4)　K のシロー2-部分群は巡回群ではない。

と仮定して証明をすすめればよいことがわかった。

$\tau \in K$, $o(\tau) = 2$ とする。$C_Q(\tau)$ が唯一つの位数2の元 t をもつと仮定すれば補題3によって $\langle t^Q \rangle$ は基本可換群，又は，$Q/O(Q)$ は唯一つの位数2の元をもつ。するとそれぞれ，$O_2(Q) > \{1\}$ あるいは Q のシロー2-部分群が唯一つの位数2の元をもつことになって(3)に矛盾する。従って $C_Q(\tau)$ は位数2の元を2個以上もつ。さて，$\overline{N_\tau} = N_\tau / N_\tau \cap K_\tau$，とおくと帰納法の仮定によって $\overline{N_\tau}$ は定理(ii)の群となる。さらに正則正規部分群の共役群によって生成されているから単純群 $L_2(q)$, $U_3(q)$, $Sz(q)$, q は偶数，となる。以下この τ を固定する。

$$t = (\alpha, \beta) \cdots\cdots \in N_\tau, \quad o(t) = 2,$$

$$V = K \cap N_\tau$$

とおく。$V/N_\tau \cap K_\tau$ は $L_2(q)$, $U_3(q)$, $Sz(q)$ の2文字の固定群に相当するから奇数位数の巡回群である。(2)より $Z(N_\tau)$ は $N_\tau \cap K_\tau$ を含むから V は中心による巡回拡大となる。従っ

て，V は可換群となる。あきらかに $[t, V] \subset V$，$[V, t]$ は位数 $q-1$ の巡回群である。再び (2) より $[K_\tau, N_\tau] = 1$，t は N_τ の元だから $[t, N_\tau \cap K_\tau] = 1$ 。$V/N_\tau \cap K_\tau$ は奇数位数であったから t は V のシロー2-部分群を中心化する。フィッティングの定理より $O(V) = [t, O(V)] \times C_{O(V)}(t)$ となるから $[V, t] = [O(V), t]$。また $V = [V, t] \times C_V(t)$ である。さらに $L_\tau \triangleright N_\tau$，$t \in N_\tau$ より $[t, L_\tau \cap K] \subset N_\tau \cap K = V$ となる。さて我々は，

$$U = [O(V), t]，；位数\ q-1\ の巡回群.$$

とおき $U \triangleleft L_\tau \cap K$ を証明しよう。x を $L_\tau \cap K$ の任意の元とすれば $txt = xv$，$v \in V$ とかける。$V^x = V$ より $O(V)^x = O(V)$，従って，$U^x \subset O(V)$。一方 V は可換群であったから $[v, U^x] = 1$ となる。任意の $u \in U$ に対して $(u^x)^t = u^{xt} = u^{txv} = (u^{-1})^{xv} = ((u^x)^{-1})^v = (u^x)^{-1}$，すなわち，$t$ は U^x の元を逆元にうつす。ところが t が逆元にうつす V の元の全体が U であったから，$U^x = U$ が得られる。ゆえに $U \triangleleft L_\tau \cap K$。以上のことをまとめると，

(5) $[V, V] = 1$，　$V^t = V = U \times C_V(t)$，

U；位数 $q-1$ の巡回群，　$[t, U] = U$，

$U \triangleleft L_\tau \cap K$.

$u \in U$，$o(u)$ が奇素数，$u \neq 1$，とする。$C_Q(u) = \{1\}$ ならば u は $Q-\{1\}$ の元と非可換となりトムプソンの定理によ

って Q は巾零群，従って $O_2(Q)>\{1\}$ となってしまう。ゆえに $C_Q(u)\neq\{1\}$ である。$\mho$ のどの元も単位元を除いて $C_Q(\tau)-\{1\}$ の元とは非可換であったから $\mho$ は $\Omega_\tau-\{\alpha,\beta\}$ 上半正則となる。従って $\Omega_\tau\cap\Omega_u=\{\alpha,\beta\}$，また（5）より $\mho^\tau=\mho$，かつ $\mho$ は巡回群だから $\Omega_u^\tau=\Omega_u$，ゆえに $L_u\ni\tau$，$N_u^\tau=N_u$。従って τ は $C_Q(u)=Q\cap N_u$ を正規化する。さらに上に述べたことから $|\Omega_u|$ は偶数かつ τ は $C_Q(u)-\{1\}$ の元とは非可換である。よって $C_Q(u)\neq\{1\}$ は奇数位数の可換群となることがわかった。$x\in L_\tau\cap K$ としよう。帰納法の仮定によって N_x は Ω_x 上定理（ii）の群として作用している。$C_Q(x)$ が四元群を含むと仮定しよう。（5）より $\langle u\rangle^x=\langle u\rangle$，よって $\Omega_u^x=\Omega_u$，x は L_u にぞくする。また $C_Q(x)$ は 2-群である。しかし $|C_Q(u)|$ は奇数であったから x は $C_Q(u)-\{1\}$ の元とは非可換，そして x は Ω_u の丁度 2 文字を固定する。

S を K のシロー 2-部分群とする。S が位数 2 の元を 3 個以上含むと仮定しよう。さらに $\tau\in Z(S)$，$o(\tau)=2$，とすれば，$S\subset C_G(\tau)\cap K\subset L_\tau\cap K\subset L_u\cap K$。$\tau\neq\tau'\in S$，かつ $o(\tau')=2$ とすれば $\langle\tau,\tau'\rangle$ は四元群となり $\langle\tau,\tau'\rangle$ のどの位数 2 の元も上の節の x と同じ条件をみたす。従って $\langle\tau,\tau'\rangle$ は $C_Q(u)-\{1\}$ 上固定する元をもたずに作用する。ところがこのような作用をもつ 2-群は巡回群又は四元数群であるから矛盾が生

じた。すなわち S は唯一つの位数 2 の元をもつ。従って (4) を考慮すれば，

(6)　K のシロー 2-部分群 S は一般四元数群である。

$u \in \mathfrak{U}$ とすると，$\Omega_u = \{\alpha\} \cup \{\beta^{C_Q(u)}\}$，$u^t = u^{-1}$，$\Omega_u^t = \Omega_u$ である。u の一般中心化群を $C_G^*(u)$ とすれば $C_G(u) \triangleleft C_G^*(u)$。一方 $t \in C_G^*(u)$ より $C_G^*(u)$ は Ω_u 上可移に作用している。従って $C_G(u) \not\leq G_\alpha$ となる。さて $x, y \in Q$ に対して $xvty$ は u と可換なことを直接計算することによって，

(7)　$u \in \mathfrak{U}$ に対して K の元 v が存在して $v^{-1}uv = u^{-1}$，

となることがわかる。この結果は (8) をみればわかるように我々の定理の証明の過程でとくに重要のように思われる。

$u \in \mathfrak{U}$，かつ $o(u)$ を素数とする。(7) より K の元 v が存在して $v^{-1}uv = u^{-1}$，適当に v をえらぶことによって $o(v)$ が 2 巾とできる。(5) より $\langle u \rangle \triangleleft L_\tau \cap K$，$S \subset L_\tau \cap K$ だから S は $\langle u \rangle$ を正規化する。従って S は u を逆元にうつす元を含む。(6) より τ は共役を無視すれば一意的に定まることに注意しよう。さて S は $N_\tau / N_\tau \cap K_\tau$ の自己同型群の部分群であり，帰納法の仮定によって $N_\tau / N_\tau \cap K_\tau \cong L_2(q)$，$U_3(q)$，又は $S_z(q)$ であった。この群の外部自己同型群は体の自己同型群となるから巡回群である。ところが S が $N_\tau / N_\tau \cap K_\tau$ の 2 個のシロー 2-部分群を不変していることから体の自己同型群の部分群とし

て作用していることがわかる。τは体の乗法群のすべての元を逆元にうつすから $q-1=3$，すなわち，$q=4$ となる。従って，

(8) $N_\tau/N_\tau\cap K_\tau \cong L_2(4)$ 又は $U_3(4)$，

$|C_Q(\tau)|=4$ 又は 4^3，　$|Z(C_Q(\tau))|=4$，

$C_Q(\tau)$ の位数2の元はすべて $Z(C_Q(\tau))$ に含まれる。

次に $C_Q(\tau)$ が Q のシロー2-部分群となることを示そう。$T=Z(C_Q(\tau))$ とおく。$(Q:C_Q(\tau))$ が偶数であると仮定して矛盾を出す。仮定より Q は次のような性質をもつ2-群 S_0 を含む。

$$S_0^\tau=S_0,\quad (S_0:C_Q(\tau))=2,\quad S_0=\langle C_Q(\tau), x\rangle$$

$x^\tau=xc$，$c\in C_Q(\tau)-\{1\}$ とかける。$\tau^2=1$ より $c^2=1$，従って $c\in T$，さらに x は $T\times\langle\tau\rangle$ を正規化する。$x^2\in C_Q(\tau)$ だから x^2 は $T\times\langle\tau\rangle$ と元ごとに可換，そして $(xc)^2=\tau x^2\tau=x^2$，より $[c,x]=1$ となる。$t_0\in T-\{1\}$ とすれば t_0^Q は τ-不変であるから $t_0^Q=\{t_0^Q\cap C_Q(\tau)\}\cup\{t_1,t_1^\tau\}\cup\cdots\cdots\cup\{t_m,t_m^\tau\}$ となる。$u_i=t_it_i^\tau$ とおくと $u_i^{t_i}=t_i^\tau t_i=u_i^{-1}$，$u_i^\tau=u_i^{-1}$。ある番号 j に対して $o(u_j)$ が奇数と仮定する。$\langle t_j,t_j^\tau\rangle$ の位数2の元は奇数個だからある $c_j\in\langle t_j,t_j^\tau\rangle$，$o(c_j)=2$ が存在して $[\tau,c_j]=1$，$u_j^{c_j}=u_j^{-1}$，$[c_j\tau,u_j]=1$ となる。c_j は T の Q-共役部分群に入るから Q の元である。従って $c_j\in C_Q(\tau)$，$o(c_j)=2$ より $c_j\in T$。一方 $T-\{1\}$ の元はすべて U-共役だから，

$c_j = c^u$ となる U の元 u が存在する。さて，$[x^u, c_j] = u^{-1}x^{-1}(uc_j^{-1}u^{-1})xuc_j = u^{-1}x^{-1}c^{-1}xuc_j = (c^{-1})^u c_j = 1$ となる。$\tau \in V$ より（5）から $[\tau, U] = 1$，従って $[x^u, \tau] = [x, \tau]^u = c^u = c_j$，すなわち，$c_j\tau = (x^u)^{-1}\tau(x^u)$。$1 = [c_j\tau, u_j] = [(x^u)^{-1}\tau(x^u), u_j]$，ゆえに，$\tau$ は $(x^u)u_j(x^u)^{-1}$ と交換可能になる。ところが t_0，x のえらびかたより $(x^u)u_j(x^u)^{-1} \in Q$，従って $(x^u)u_j(x^u)^{-1} \in C_Q(\tau)$ となる。$o(u_j)$ を奇数と仮定していたので，これは（8）に矛盾する。つまり任意の j に対して $o(u_j)$ は偶数である。$\langle u_j \rangle$ の位数 2 の元を $\tilde{u}_j$ とすれば $\tilde{u}_j \in T$，ゆえに t_0^Q の任意の元 $\tilde{t}$ に対して $C(\tilde{t}) \cap T \neq \{1\}$ となる。これは補題 4 の対偶をとることによって $T \cap O_2(Q) \neq \{1\}$ を意味するから矛盾である。従って，

（9） $C_Q(\tau)$ は Q のシロー2-部分群である。

再び $T = Z(C_Q(\tau))$，S を K のシロー2-部分群，$S \subset C_G(\tau)$ とする。$|T| = 4$ であった。$[S, C_Q(\tau)] \subset C_Q(\tau)$，かつ G は Ω 上奇数次の置換群なので $S^* = S \cdot C_Q(\tau)$ とおけば S^* は G のシロー2-部分群となる。（6）および（8）より S^* の位数 2 の元は $T \times \langle \tau \rangle$ に含まれる。$L_2(4)$，$U_3(4)$ のシロー2-部分群の構造より $Z(S^*) = \langle z \rangle \times \langle \tau \rangle$，$z \in T$，$o(z) = 2$ となる。一方，S^* は G_α の部分群だから $\Omega_{S^*} = \{\alpha\}$，従って $N_G(S^*) \subset G_\alpha$，かつ $[N_G(S^*), Q] \subset Q$。あきらかに $Q \cap Z(S^*) = \langle z \rangle \subset T$ である。

バーンサイドの定理より $Z(S^*)$ の元のフュージョンは $N_G(S^*)$ が支配するから，$z \not\sim \tau$，かつ，$z \sim \tau z$，となる。前に述べたように T の位数2の元はすべて U で共役だったから $cl_G(\tau) \cap T = \phi$。さて τ が S^* で孤立していればグラーバーマンの Z^*-定理によって G は自明でない可解正規部分群をもつ。従って，$\tau \sim \tau z_1$，$z_1 \in T - \{1\}$ のはずである。$[U, \tau] = 1$ より $\tau \sim \tau z$。再びバーンサイドの定理によって $N_G(S^*)$ で $\tau \sim \tau z$ が生ずる。$\tau \not\sim z$ より τ を τz にうつす $N_G(S^*)$ の元は偶数位数となるが，これは S^* が G のシロー2-部分群であることに矛盾する。

従って，シュルトの定理が証明されたことになる。

後記　鈴木先生のお話によるとこの定理のヘリングによる別証明があり，それは "$N_G(Q) \cap Q^g \neq \{1\}$ ならば $Q = Q^g$"，と云う条件から出発してもっと簡単に結果がでているそうです。

5ページに $L_x = C_G(x)$ としても証明はよいようだと書きましたが，やはり（6）の証明がうまく行かないようですので取り消します。

II. 有限群上の可解信号函手について

(ゴルドシュミット)

§1. 序

単純群の位数2の元の中心化群の構造を研究するために生じた，いわゆる"信号函手定理"を証明しよう。この定理ははじめゴレンシュテインによって示され，ついでゴルドシュミットによって拡張かつ簡略化された。ここでは後者による方法で述べる。

定義1　Gを有限群，$r \in \pi(G)$に対してAをGの可換r-部分群とする。任意の$a \in A-\{1\}$に対して$C_G(a)$のA-不変r'-部分群$\theta(C_G(a))$が定義されて，そして

$$C_G(a_1) \cap \theta(C_G(a)) \subset \theta(C_G(a_1))$$

が$A-\{1\}$の任意の元a，a_1について成立するとき，θをA-信号函手とよぼう。とくにすべての$a \in A-\{1\}$に対して$\theta(C_G(a))$が可解群となるとき，θが可解であると云う。

以下θを群G上のA-信号函手とする。

$$N_\theta(A) = \{ X \in N_G(A;r') \mid C_X(a) \subset \theta(C(a)),\ \forall a \in A-\{1\} \}$$

とおく。θが可解のとき$N_\theta(A)$の元はすべて可解とする。

定義2　$N_\theta(A)$の包含に関する極大元が唯一つ存在するとき，θを完全とよびこの極大元を$\theta(G)$であらわす。

定義3　任意の$X \in N_\theta(A)-\{1\}$に対して"$N_G(X) \cap N_\theta(A)$"が

極大元$\theta(N_G(X))$を一意的にもつとき，θを局所完全とよぶ。このとき$\theta(C_G(X))=\theta(N_G(X))\cap C_G(X)$とおく。

我々の目標は次の主定理の証明にある。

主定理　θを有限群G上の可解A-信号函手とする。Aの可換群としての階数$m(A)$が4以上ならば$\theta(G)$が存在する。すなわち，θは完全である。

注意　とくに$r=2$，つまりAが2-群のときは$m(A)\geqq 3$と云う弱い条件で主定理は成立する。しかしこの証明はゴレンシュティン の証明と類似し複雑なようである。

いくつかの記号を導入する。

$$\mathcal{E}_k(A)=\{B \mid B\subset A,\ m(B)=k\}$$

$$\pi(\theta)=\bigcup_{a\in A-\{1\}}\pi(\theta(C_G(a)))$$

素数の集合σに対して

$$\mathcal{U}_\theta(A;\sigma)=\{X\in\mathcal{U}_\theta(A)\mid \pi(X)=\sigma\}$$

$$\mathcal{U}_\theta^*(A;\sigma)=\{Y\in\mathcal{U}_\theta(A;\sigma)\mid Y\text{は極大元}\}$$

§2. 準備

θの基本的性質についてまとめておこう。以下にのべる事柄は何度も繰返して主定理の証明に用いられる。

(2.1)　$\theta(C(a))\in\mathcal{U}_\theta(A)$

　　$X\in\mathcal{U}_\theta(A)$かつ$X\subset C_G(a)$ならば$X\subset\theta(C_G(a))$.

(2.2)　$X\in\mathcal{U}_\theta(A)$, $Y\in\mathcal{U}_X(A)$, ならば　$Y\in\mathcal{U}_\theta(A)$.

(2. 3)　Gの部分群H, Kに対して$\theta(H)$, $\theta(K)$が定義されるならば$\theta(H)\cap K=\theta(H)\cap\theta(K)=H\cap\theta(K)$。

(2. 4)　$m(A)\geqq 2$とする。$\theta(G)$が存在するための必要十分条件は$\langle\theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle\in \mathcal{U}_\theta(A)$となることであり，このとき$\theta(G)=\langle\theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle$となる。さらに$\theta$が可解ならば$\theta(G)$は可解群である。

証明　(2.1), (2.2)は定義よりあきらか。(2.3)は(2.2)よりわかる。(2.4)を示そう。$X=\langle\theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle$とおく。$X\in \mathcal{U}_\theta(A)$と仮定する。任意の$Y\in\mathcal{U}_\theta(A)$に対して，よく知られているように$Y=\langle C_Y(a)\mid a\in A-\{1\}\rangle$，定義によって$C_Y(a)\subset\theta(C_G(a))$。従って$Y\subset X$となるから$X$は$\mathcal{U}_\theta(A)$の唯一つの極大元である。つまり$\theta(G)=X$。逆に$\theta(G)$が存在すると仮定すれば$\theta(C_G(a))\in\mathcal{U}_\theta(A)$より$\theta(C_G(a))\subset\theta(G)$がすべての$a\in A-\{1\}$に対して成立する。従って$X\subset\theta(G)$。(2.2)を考慮すれば$X\in\mathcal{U}_\theta(A)$となる。

次に可解群に関する結果をまとめておこう。証明を省略したものはゴレンシュテインの教科書を参照されたい。

補題 2.5　可換r-群Aがr'-群Xに作用していれば，$X=\langle C_X(A_0)\mid m(A/A_0)=1\rangle$となる。

補題 2.6　Aをr-群，Xを可解r'-群とし$[A, X]\subset X$と仮定する。すると，XのA-不変ホールσ-部分群の集合上$C_X(A)$は可移,

とくに $Q\in\mathcal{U}_X(A;\delta)$ ならば Q を含む X の A-不変ホール δ-部分群が存在する。さらに $Q_1,Q_2\in\mathcal{U}_X(A;\delta)$ ならば $\langle Q_1,Q_2^x\rangle$ が δ-部分群となる $x\in C_X(A)$ が存在する。

証明　$G=AX$ とおく。$H_1,H_2\in\mathcal{U}_X(A;\delta)$ をホール δ-部分群とすれば AH_1,AH_2 は G のホール部分群である。G は可解群だからある $x\in G$ が存在して $AH_1=(AH_2)^x$, H_1,H_2 のえらびかたより $A^x=A$, $H_1=H_2^x$ と仮定してよい。従って $x\in N_G(A)=AN_X(A)$ より $x=ax_1$, $a\in A$, $x_1\in N_X(A)$ とかける。ところが $[N_X(A),A]\subset A\cap X=\{1\}$ より $N_X(A)=C_X(A)$。よって $H_2^x=H_2^{ax_1}=H_2^{x_1}=H_1$ がえられる。可解群 G においては $D_{\{\gamma,\delta\}}$ が成立するから G の A-不変ホール $\{\gamma,\delta\}$-部分群 H が存在して，$AQ\subset H=A(H\cap X)$ となる。$Q\subset H\cap X$ となって，これが求めるものである。$Q_1\subset H\cap X$ とすれば証明の前半より $x\in C_X(A)$ が存在して $Q_2^x\subset H\cap X$, 従って $\langle Q_1,Q_2^x\rangle$ は δ-部分群である。

補題 2.7　p-可解群 X の p-部分群 P に対して $O_{p'}(N_X(P))$ は $O_{p'}(X)$ に含まれる。

証明　$\bar{X}=X/O_{p'}(X)$ とおけば，$N_{\bar{X}}(\bar{P})=\overline{N_X(P)}$ である。$|O_{p'}(X)|>1$ ならば $|X|$ についての帰納法によって $O_{p'}(N_{\bar{X}}(\bar{P}))\subset O_{p'}(\bar{X})$，ところが $O_{p'}(\bar{X})=\{1\}$ より $O_{p'}(N_X(P))\subset O_{p'}(X)$ が従う。ゆえに，$O_{p'}(X)=\{1\}$ ならば $O_{p'}(N_X(P))=\{1\}$ を示せばよい。$Q=O_{p'}(N_X(P))$ とおく。$M=O_p(X)$ とすれば $Q\lhd N_X(P)$ だから $[C_M(P),Q]$

$\subset Q \cap M = \{1\}$。一方 $[P\times Q, M] \subset M$ より $[M, Q] = \{1\}$。ところが $O_{p'}(X) = \{1\}$ だからホール・ヒグマンの補題より $Q = \{1\}$。

補題 2.8　p-可解群 X の p'-部分群を Q とする。$|N_X(Q)|_p = |X|_p$ ならば Q は $O_{p'}(X)$ に含まれる。

証明　再び $|X|$ に関する帰納法を用いることによって $O_{p'}(X) = \{1\}$ と仮定してよい。仮定より $[O_p(X), Q] \subset O_p(X) \cap Q = \{1\}$，従ってホール・ヒグマンの補題から $O_p(X) \supset C_X(O_p(X)) \supset Q$ となり $Q = \{1\}$ がでる。

補題 2.9　p，r を相異なる素数，V を可換 r-群かつ $m(V) \geqq 2$，X を p-可解 r'-群とする。$[V, X] \subset X$ ならば $\bigcap_{v\in V-\{1\}} O_{p'}(C_X(v))$ は $O_{p'}(X)$ に含まれる。

証明　$\overline{X} = X/O_{p'}(X)$ とおく。$|\overline{X}| < |X|$ とすれば帰納法の仮定から $\bigcap_{v\in V-\{1\}} O_{p'}(C_{\overline{X}}(v)) \subset O_{p'}(\overline{X})$。$p \neq r$ より $C_{\overline{X}}(v) = \overline{C_X(v)}$，従って $\bigcap_v O_{p'}(C_{\overline{X}}(v)) = \bigcap_v O_{p'}(\overline{C_X(v)}) \subset O_{p'}(\overline{X}) = \{1\}$，$\bigcap_v O_{p'}(C_X(v)) \subset O_{p'}(X)$。以下 $O_{p'}(X) = \{1\}$ と仮定する。$Q = \bigcap_{v\in V-\{1\}} O_{p'}(C_X(v))$ とおく。$v \in V - \{1\}$ とする。$Q \subset C_X(v)$ より $[Q, C_{O_p(X)}(v)] \subset C_{O_p(X)}(v)$，従って $Q \subset O_{p'}(C_X(v))$ より，$[C_{O_p(X)}(v), Q] \subset C_{O_p(X)}(v) \cap O_{p'}(C_X(v)) = \{1\}$ がすべての $v \in V - \{1\}$ に対して成立する。一方 $O_p(X) = \langle C_{O_p(X)}(v) \mid v \in V - \{1\} \rangle$ であったから $[Q, O_p(X)] = \{1\}$，ゆえに再びホール・ヒグマンの補題より $Q = \{1\}$ が従う。

さて，次に G 上の A-信号函手 θ の，G の部分群又は G の準同

型像への制限を定義しよう。

定義　θ を有限群 G 上の A-信号函手，$G \supset H \supset A$ とする。

$$\theta_H(C_H(a)) = \theta(C_G(a)) \cap H, \quad a \in A-\{1\},$$

$G \triangleright X$，$(|A|,|X|)=1$ とし $\overline{H} = HX/X$ とおく。

$$\overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a})) = \overline{\theta(C_G(a))}, \qquad a \in A-\{1\},$$

で各々，θ_H，$\overline{\theta}$，を定義する。

補題 2.10　1）θ_H は H 上の A-信号函手となり，θ が可解ならば θ_H も可解となる。

2）$\overline{\theta}$ は $\overline{G}$ 上の $\overline{A}$-信号函手となり，θ が可解ならば $\overline{\theta}$ も可解となる。

証明　1）$A \subset H$ よりすべての $a \in A-\{1\}$ に対して $И_H(A;\Upsilon') \ni \theta_H(C_H(a))$ が成立する。さらにすべての $a, a_1 \in A-\{1\}$ に対して

$$\theta_H(C_H(a)) \cap C_H(a_1) = \theta(C_G(a)) \cap C_H(a_1) \subset \theta(C_G(a_1)) \cap H = \theta_H(C_H(a_1)),$$

従って θ_H は H 上の A-信号函手である。

2）定義によって $\overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a})) \in И_{\overline{G}}(\overline{A};\Upsilon')$。$a_1 \in A-\{1\}$ に対して $Y/X = C_{\overline{G}}(\overline{a}_1) \cap \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a}))$ とおけば $\theta(C_G(a))X \supset Y \supset X$，従って $Y = X(Y \cap \theta(C_G(a)))$ となる。$Y_0 = Y \cap \theta(C_G(a))$ とおく。$[A, Y] \subset Y$ より $[A, Y_0] \subset Y_0$，一方 $[Y, a_1] \subset X$ を考慮すれば，$[Y_0, a_1] \subset Y_0 \cap X$。$(\Upsilon, |Y_0|)=1$，ゆえに Y_0 は $X C_{Y_0}(a_1)$ に含まれる。ところが $C_{Y_0}(a_1) = C_Y(a_1) \cap \theta(C_G(a)) \subset$

$\theta(C_G(a)) \cap C_G(a_1) \subset \theta(C_G(a_1))$ より $Y_0 \subset X\,\theta(C_G(a_1))$。従って，$\overline{Y} = \overline{Y}_0 \subset \overline{\theta(C_G(a_1))} = \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a}_1))$ となる。すなわち，

$$C_{\overline{G}}(\overline{a}_1) \cap \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a})) \subset \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a}_1)).$$

となるので $\overline{\theta}$ は $\overline{G}$ 上の $\overline{A}$-信号函手である。

補題 2.11　$X \in \mathcal{N}_G(A;\Gamma')$，かつ X を可解群とする。$m(A) \geqq 3$，ならば θ_{AX} は完全である。とくに $X = \langle X \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$ ならば $X \in \mathcal{N}_\theta(A)$ である。

証明　まずはじめに前半を $|G|$ に関する帰納法で証明しよう。$G = AX$ と仮定してよいことは明きらかであろう。$X_0 = \langle X \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$ とおく。$X > X_0$，ならば帰納法の仮定によって $\theta_{AX_0}(AX_0)$ が存在する。従って $\mathcal{N}_{\theta_{AX_0}}(A) \ni \langle \theta_{AX_0}(C_{AX_0}(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle \theta(C_G(a)) \cap AX_0 \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle \theta(C_G(a)) \cap X_0 \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle X \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$，故に θ は完全である。以下 $X = X_0$ と仮定してよい。$C_X(a) = \theta(C(a))$，$a \in A - \{1\}$ を証明すればよい。K を X に含まれる G の極小正規部分群とする。$K \neq \{1\}$，より $\overline{X} = X/K$，$\overline{G} = G/K$ とおくと $|\overline{G}| < |G|$。帰納法の仮定によって $\overline{\theta}$ は完全だから $\overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a})) = C_{\overline{X}}(\overline{a})$ となる。$\overline{\theta}$ の定義から $C_X(a) = \theta(C_G(a))C_K(a)$ が得られる。$K \subset N \in \mathcal{N}_\theta(A)$ となる N が存在すれば $C_K(a) \in \mathcal{N}(A)$ より $C_K(a) \subset \theta(C_G(a))$，ゆえに $C_X(a) = \theta(C_G(a))$ となって証明が完了する。だからこのような N が存在しないと仮定し

てよい。$X \supset X_1 \supset K$，かつ X/X_1 も主組成 A-因子とする。再び帰納法の仮定によって $\theta_{AX_1}(AX_1)$ が存在する。一方，$C_{X_1}(a) \subset \theta(C_{X_1}(a))C_K(a)$，$X_1 = \langle C_{X_1}(a) \mid a \in A - \{1\} \rangle$，$K = \langle C_K(a) \mid a \in A - \{1\} \rangle$。従って $\theta_{AX_1}(AX_1) = \langle \theta(C_{X_1}(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$ より $X_1 = \theta(AX_1) \cdot K$ となる。$m(A) \geqq 3$ だから補題 2.5 によって $\theta(C_G(a)) = \langle \theta(C_G(a)) \cap C(V) \mid V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle = \langle \theta(C_G(a)) \cap \theta(C_G(V)) \mid V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle$。一方 $X = X_0 = \langle X \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$，かつ X は G のホール正規部分群だから $X = \langle \theta(C_G(V)) \mid V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle$ となる。$V \in \mathcal{E}_2(A)$，$x \in \theta(C(V)) = \bigcap_{v \in V - \{1\}} \theta(C_G(v))$ に対して $X_2 = \theta(AX_1)^x$ とおく。$m(V) \geqq 2$ より，$\theta(AX_1) = \langle X_1 \cap \theta(C(v)) \mid v \in V - \{1\} \rangle$。$v \in V - \{1\}$ に対してあきらかに $C_{\theta(AX_1)}(v) \subset \theta(AX_1) \in \mathcal{U}_\theta(A)$ かつ $C_{\theta(AX_1)}(v) \in \mathcal{U}(A)$，よって $C_{\theta(AX_1)}(v) \in \mathcal{U}_\theta(A)$，すなわち $C_{\theta(AX_1)}(v) \subset \theta(C_G(v))$。両辺を x で変換すると $x \in \theta(C(V))$ だから $C_{X_2}(v) = C_{\theta(AX_1)^x}(v^x) \subset \theta(C_G(v))^x = \theta(C_G(v))$ がすべての $v \in V - \{1\}$ に対して成立する。$X \triangleright X_1 \supset \theta(AX_1)$ より $X_1 \supset X_2$，従って $\theta(AX_1) = \langle X_1 \cap \theta(C_G(v)) \mid v \in V - \{1\} \rangle \supset X_2 = \langle C_{X_2}(v) \mid v \in V - \{1\} \rangle$。両辺の位数を比較して $\theta(AX_1) = X_2 = \theta(AX_1)^x$。故にすべての $V \in \mathcal{E}_2(A)$ に対して $\theta(C_G(V))$ は $\theta(AX_1)$ を正規化することがわかった。ところが $G = AX = A\langle \theta(C_G(V)) \mid V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle$，従って $G \triangleright \theta(AX_1)$。しかし，我々は G のどの極小正規部分群も $\mathcal{U}_\theta(A)$ の元には含まれないと仮定していた。だから $\theta(AX_1) = \{1\}$ である。すなわち $X_1 = \theta(AX_1)K = K$，よって X/K は

主組成 A-因子である。$V = C_A(X/K)$ とおく。$m(A) \geq 3$ より，$m(V) \geq 2$。$v \in V - \{1\}$ とすると $X/K = C_{X/K}(v)$，すなわち，$[v, X] \subset K$，一方 $X = [v, X]C_X(v)$，故に $X = KC_X(v)$ となる。G は可解群だからその極小正規部分群は可換群である。K の極小性によって $X = C_X(v)$ 又は $C_X(v) \cap K = \{1\}$ となる。ところが，$m(V) \geq 2$ より $K = \langle C_K(v) \mid v \in V - \{1\} \rangle \neq \{1\}$，従って $C_K(v_0) \neq \{1\}$ となる $v_0 \in V - \{1\}$ が存在するはずである。故に $X = C_X(v_0)$ となる。ところが $a \in A - \{1\}$ とすれば θ は A-信号函手なので $\theta(C_G(a)) = \theta(C_G(a)) \cap X = \theta(C_G(a)) \cap C_X(v_0) \subset \theta(C_G(v_0))$，一方 $X = \langle \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$ より $X = \theta(C_G(v_0))$。従って $C_X(a) = C_G(a) \cap \theta(C_G(v_0)) \subset \theta(C_G(a))$ より $C_X(a) = \theta(C_G(a))$ が得られ，帰納法による証明は完了した。つまり θ_{AX} は完全である。さてこのとき $X = \langle X \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$ としよう。すると $\theta_{AX}(AX) = \langle \theta_{AX}(C_{AX}(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle \theta(C_G(a)) \cap AX \mid a \in A - \{1\} \rangle$，より $X = \theta_{AX}(AX) = \theta(AX) \in N_\theta(A)$ となる。

§3．可移性定理

定理 3.1　θ を有限群 G 上の A-信号函手，$m(A) \geqq 3$ とする。任意の $p \in \pi(\theta)$ に対して $\theta(C_G(A))$ は $N^*_\theta(A; p)$ 上可移である。

証明　$a \in A - \{1\}$，$P \in N^*_\theta(A; p)$ とすると $C_P(a) \subset \theta(C_G(a))$。従って $x \in \theta(C_G(A))$ に対して $C_{P^x}(a) \subset \theta(C_G(a))$，ゆえに $P^x \in N^*_\theta(A; p)$ となる。つまり $\theta(C_G(A))$ は $N^*_\theta(A; p)$ 上に作用してい

る。$P_1, P_2 \in \mathcal{U}^*_\theta(A;p)$, かつ, P_1, P_2 は異なる $\theta(C_G(A))$ の可移域に入るものの中で $|P_1 \cap P_2|$ が最大と仮定して矛盾を導こう。$H = P_1 \cap P_2$, $R_i = N_{P_i}(H)$, $(i=1,2)$ とおけば $H < P_i$, $H < R_i$ $(i=1,2)$ としてよい。S_i/H を $S_i \subset R_i$ なる主組成A-因子とする。$V_i = C_A(S_i/H)$ とおけば A は S_i/H 上既約に作用し, そして $m(A) \geqq 3$ だから $m(V_i) \geqq 2$, 従って $a_0 \in V_1 \cap V_2 - \{1\}$ をとれば $C_{R_i}(a_0) \not\subset H$ $(i=1,2)$ となる。$N = N_G(H) \supset R_i$, $N_0 = N \cap \theta(C_G(a_0))$ とおく。すると $N_0 \in \mathcal{U}_G(A;\pi')$。$R_i \subset P_i \in \mathcal{U}_\theta(A)$, $R_i \in \mathcal{U}_G(A)$, 従って $R_i \in \mathcal{U}_\theta(A)$, ゆえに, $C_{R_i}(a_0) \in \mathcal{U}_\theta(A)$, $(i=1,2)$ となる。これは $C_{R_i}(a_0) \subset N \cap \theta(C_G(a_0))$ を示している。シュアー-ザッセンハウの定理よりある $x \in C_{N_0}(A)$ が存在して, $P_0 = \langle C_{R_2}(a_0)^x, C_{R_1}(a_0) \rangle \in \mathcal{U}_{N_0}(A;p)$ となる。$H \in \mathcal{U}_\theta(A)$ だから $C_H(a) \subset \theta(C_G(a))$ が $a \in A - \{1\}$ に対して成り立つ。故に $P_0H = \langle C_{R_2}(a_0)^x, C_{R_1}(a_0), H \rangle = \langle C_{R_2}(a_0)^x, C_{R_1}(a_0), H \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle = \langle P_0H \cap \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$。ところが P_0H は可解群なので補題2.11によって $P_0H \in \mathcal{U}_\theta(A)$ となる。$HP_0 \subset P_0^* \in \mathcal{U}^*_\theta(A;p)$ とする。$C_{R_i}(a_0) \not\subset H$ より $P_1 \cap P_0^* \supset C_{R_1}(a_0)H > H$, $P_2^x \cap P_0^* \supset C_{R_2}(a_0)^xH > H$, 従って $|H|$ の極大性によって, P_1, P_0^*, P_2^x, は同じ $\theta(C_G(A))$ の可移域に入る。しかし, これは P_1, P_2 のえらび方に矛盾している。

補題 3.2　$P \in \mathcal{U}_\theta(A;p)$, $B \subset A$, $m(B) \geqq 2$ と仮定すれば

次の 1), 2) は同値である。

1) $P \in \mathcal{N}_\theta^*(A;p)$

2) すべての $b \in B-\{1\}$ に対して $C_P(b)$ は $\theta(C_G(b))$ のシロー p-部分群である。

証明 1) ⇒ 2) $b \in B-\{1\}$ とする。$(|A|, |\theta(C_G(b))|) = 1$ より $\theta(C_G(b))$ は A-不変シロー p-部分群 $\theta(C_G(b))_p$ を含む。定理 3.1 よりある $x \in \theta(C_G(A))$ が存在して $P^x \supset \theta(C_G(b))_p$ とできる。定義より $\theta(C_G(A)) \subset \theta(C_G(b))$, 従って, すべての $y \in \theta(C_G(A))$ に対して, $\theta(C_G(b))_p{}^y \subset \theta(C_G(b))$, 換言すれば, $\mathcal{N}_\theta^*(A;p)$ のすべての元は A-不変な $\theta(C_G(b))$ のシロー p-部分群を含む。故に $P \cap \theta(C_G(b)) = C_P(b)$ は $\theta(C_G(b))$ のシロー p-部分群となる。

2) ⇒ 1) $P \subset P^* \in \mathcal{N}_\theta^*(A;p)$ と仮定しよう。$m(B) \geqq 2$ より $P^* = \langle C_{P^*}(b) \mid b \in B-\{1\} \rangle$。一方 $C_{P^*}(b) \in \mathcal{N}_\theta(A)$ より, $C_{P^*}(b) \subset \theta(C_G(b))$。ところが $C_P(b) \subset C_{P^*}(b) \subset \theta(C_G(b))$, 従って 2) の条件より $C_P(b) = C_{P^*}(b)$ がすべての $b \in B-\{1\}$ に対して成立する。故に $P^* = \langle C_P(b) \mid b \in B-\{1\} \rangle = P$ となって $P \in \mathcal{N}_\theta^*(A;p)$ である。

§ 4. 無比定理

仮定 4.1 θ を G 上の可解かつ局所完全 A-信号函手, $m(A) \geqq 3$ とする。$p, q \in \pi(\theta)$, $p \neq q$ に対して $\mathcal{N}_\theta^*(A;p,q)$ 上の $\theta(C_G(A))$ による可移域を $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n$ とする。$H \in \mathcal{O}_i$

に対して $q^{f_i} = |O_q(H)|$ とおく。

f_i は i にのみ依存することに注意しよう。

K を巾零 (p,q)-群とするとき $K = K_p \times K_q$ と表わす。

任意の群 H に対してフィッティング群を $F(H)$ と書く。

定義　$K \in И_\theta(A ; p, q)$，K を巾零群とする。そして

1）$K_p \neq \{1\} \neq K_q$

2）$K_p \subset O_{q'}(\theta(N(K_q)))$

3）$K_q \subset O_{p'}(\theta(N(K_p)))$

が成立するとき K を (p,q)-無比部分群とよぶことにしよう。

この§では仮定 4.1 を大前提としよう。

補題 4.2　K を (p,q)-無比部分群，$K \subset X \in И_\theta(A)$ とする。すると $K_p \subset O_{q'}(X)$。もし $X \in И_\theta(A ; p, q)$ ならば $K \subset F(X)$。

証明　$N_X(K_q) \subset \theta(N(K_q))$ より $N_X(K_q) \cap O_{q'}(\theta(N(K_q))) \lhd N_X(K_q)$，故に，$K_p \subset N_X(K_q) \cap O_{q'}(\theta(N(K_q))) \subset O_{q'}(N_X(K_q))$。補題 2.7 より $K_p \subset O_{q'}(X)$。同様にして $K_q \subset O_{p'}(X)$。$X \in И_\theta(A ; p, q)$ とすれば，$K = K_p \times K_q \subset O_p(X) \times O_q(X) = F(X)$，となる。

補題 4.3　$H_i \in \mathfrak{H}_i$ かつ $K \lhd H_i$，$K_p \neq \{1\} \neq K_q$，$K \in И(A)$，K は巾零とする。このとき K は (p,q)-無比部分群となる。さらに $K \subset H \in И_\theta^*(A ; p, q)$ ならば $H \in \mathfrak{H}_i$ である。

証明　$K_p \lhd H_i \in И_\theta^*(A ; p, q)$ より $K_p \in И_\theta(A ; p)$，$N(K_p) \supset H_i$ かつ θ は局所完全だから $\theta(N(K_p)) \supset H_i$，同様にして $\theta(N(K_q))$

$\supset H_i$となる。$(|A|, |\theta(N(K_q))|) = 1$ およびH_iの極大性によってH_iは$\theta(N(K_p))$，$\theta(N(K_q))$のホール(p,q)-部分群である。$K_p \lhd H_i$よりK_pは$\theta(N(K_q))$のあるシローq-部分群によって正規化されるから補題2.8によって$K_p \subset O_{q'}(\theta(N(K_q)))$，同様にして$K_q \subset O_{p'}(\theta(N(K_p)))$が得られる。従って$K$は$(p,q)$-無比部分群となる。

次に$K \subset H_j \in \mathcal{O}_j$と仮定して$f_j \leq f_i$を示そう。補題4.2より$K \subset F(H_j) = O_p(H_j) \times O_q(H_j) \in И_\theta(A)$，従って$Z(O_p(H_j)) \times O_q(H_j) \in И_\theta(A)$。一方$\theta$は局所完全かつ$K_p$は$Z(O_p(H_j)) \times O_q(H_j)$で正規化されるから$\theta(N(K_p)) \supset Z(O_p(H_j)) \times O_q(H_j)$となる。$\theta$は可解，$H_i$は$\theta(N(K_p))$のホール$(p,q)$-部分群なので$y \in \theta(N(K_p))$が存在して$Z(O_p(H_j))^y \times O_q(H_j)^y \subset H_i$とできる。補題2.6によって$y \in C(A)$であるが$C(A) \cap \theta(N(K_p)) \subset \theta(C(A))$より，$y \in \theta(C(A)) \cap \theta(N(K_p))$とできる。$\mathcal{O}_j$の定義によって$H_j^y \in \mathcal{O}_j$。$H_j^y \rhd Z(O_p(H_j))^y \times O_q(H_j)^y$より$Z(O_p(H_j))^y \times O_q(H_j)^y$は$(p,q)$-無比部分群。ゆえに補題4.2より$F(H_i) \supset Z(O_p(H_j))^y \times O_q(H_j)^y$，従って，$O_p(H_i) \times O_q(H_i) \supset Z(O_p(H_j))^y \times O_q(H_j)^y$，すなわち，$O_q(H_j)^y \subset O_q(H_i)$が得られた。これは$f_j \leq f_i$を示している。

$H_j^y \rhd Z(O_p(H_j^y)) \times O_q(H_j^y)$だから，$K$と同じ役割を果す。上と同じ方法で$f_i \leq f_j$が得られる。従って$f_i = f_j$，$O_q(H_j)^y = O_q(H_i)$となる。さて$N(O_q(H_i)) \supset H_i, H_j^y$，これらの極大性よ

り $\theta(N(O_q(H_i)))$ のホール (p, q)-部分群である。補題 2.6 および y のとり方によって $i = j$ となる。

定理 4.4　$H_i \in \vartheta_i$, $K \in \mathcal{U}_{F(H_i)}(A)$, $K_p \neq \{1\} \neq K_q$ とすれば K は (p, q)-無比部分群である。さらに $K \subset H \in \mathcal{U}^*_\theta(A ; p, q)$ ならば $H \in \vartheta_i$ となる。

証明　$\tilde{H} \in \mathcal{U}^*_{\theta(N(K_p))}(A ; p, q)$, かつ, $\tilde{H} \supset Z(O_p(H_i)) \times O_q(H_i)$ とする。すると $\tilde{H} \in \mathcal{U}_\theta(A)$ となる。$\tilde{H} \subset H^* \in \mathcal{U}^*_\theta(A ; p, q)$ とする。補題 4.3 より $Z(O_p(H_i)) \times O_q(H_i)$ は (p, q)-無比部分群で $\tilde{H}$ に含まれるから $H^* \in \vartheta_i$, そして, $O_q(H_i) = O_q(H^*)$。従って $K_q \subset \tilde{H} \cap O_q(H^*) \subset O_q(\tilde{H})$。$\tilde{H}$ のとり方より $O_q(\tilde{H})$ は $\theta(N(K_p))$ のあるシロー p-部分群で正規化されている。補題 2.8 によって $K_q \subset O_q(\tilde{H}) \subset O_{p'}(\theta(N(K_p)))$。$p$ と q の対称性によって $K_p \subset O_p(\tilde{H}) \subset O_{q'}(\theta(N(K_q)))$, 従って K は (p, q)-無比部分群となる。

補題 2.6 より $\mathcal{U}^*_{\theta(N(K_p))}(A ; p, q)$ の元は $C(A) \cap \theta(N(K_p)) = \theta(C(A))$ の元で共役であった。ところが $\tilde{H} \subset H^*$ のとき $H^* \in \vartheta_i$ であったから ϑ_i の定義によって $\mathcal{U}^*_{\theta(N(K_p))}(A ; p, q)$ の元はすべて ϑ_i に含まれる。

$K \subset H_j \in \vartheta_j$ と仮定する。補題 4.2 によって $K \subset F(H_j)$。従って, 上に述べたように $i = j$ となる。

§5、主定理の証明

これまでの結果を用いて主定理を証明しよう。

Gを最小の反例とする。すなわちAをGの可換部分群で$m(A) \geqq 4$，θをG上の可解A-信号函手で$\theta(G)$が存在しないと仮定する。さらにG上の完全でない可解A-信号函手の中で$|\pi(\theta)|$が最小としよう。

補題 5.1　θは局所完全かつ$A = \Omega_1(A)$と仮定してよい。

証明　$\{1\} \neq K \in \mathcal{U}_\theta(A)$，$N = N_G(K)$とおく。補題2.10より$\theta_N$はN上の可解A-信号函手である。$G > N$ならば帰納法の仮定によって$\theta_N(N)$が存在する。従って$\theta$は局所完全となる。次に$G = N$，すなわち，$G \triangleright K$，としよう。$\overline{G} = G/K$，とおき$\overline{\theta}$をつくれば補題2.10より$\overline{\theta}$は$\overline{G}$上の可解$\overline{A}$-信号函手である。$|G| > |\overline{G}|$だから帰納法の仮定によって$\overline{\theta}(\overline{G})$が存在する。$\overline{\theta}(\overline{G}) = X/K$とおけば$X/K = \langle \overline{\theta}(C_{\overline{G}}(\overline{a})) \mid \overline{a} \in \overline{A} - \{\overline{1}\} \rangle = \langle \overline{\theta(C_G(a))} \mid a \in A - \{1\} \rangle$より$\langle \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle \subset X \in \mathcal{U}_G(A; \pi')$かつ，$X$は可解群となる。補題2.11より$\theta_{AX}$は完全，従って$\langle \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle \in \mathcal{U}_\theta(A)$となるから$\theta(G)$が存在することになって$\theta$のえらび方に矛盾する。

$A_0 = \Omega_1(A)$とおけば$m(A_0) \geqq 4$。θを可解A_0-信号函手θ_0とみなせる。θ_0が完全と仮定すれば$X = \langle \theta_0(C_G(a)) \mid a \in A_0 - \{1\} \rangle \in \mathcal{U}_\theta(A_0)$，さらに$X \in \mathcal{U}_G(A; \pi')$となる。$a \in A - \{1\}$とすれば適当な自然数$n$が存在して$a^{r^n} \in A_0$，$C_G(a) \subset C_G(a^{r^n})$となる。ゆえに$\theta(C_G(a)) \subset \theta(C_G(a^{r^n}))$，従って$X = \langle \theta(C_G(a)) \mid a \in A - \{1\} \rangle$。

補題2.11によって $X \in \mathcal{U}_\theta(A)$，つまり $\theta(G)$ が存在することになって矛盾である。故に θ_0 が完全なことを示せばよいから $A = A_0 = \Omega_1(A)$ と仮定してよい。

定義　$p \in \pi(\theta)$，$V \in \mathcal{E}_2(A)$ に対して，

$$K^{(p)}(C_G(V)) = \bigcap_{v \in V - \{1\}} O_{p'}(\theta(C_G(v)))$$

とおく。さらに $a \in A - \{1\}$ に対して

$$\theta^{(p)}(C_G(a)) = \langle \theta(C_G(a)) \cap K^{(p)}(C_G(V)) \mid a \in V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle$$

とおく。a が固定されて V がうごくことに注意しよう。

補題5.2　$\theta^{(p)}$ は G 上の可解 A-信号函手であり，$|\pi(\theta^{(p)})| < |\pi(\theta)|$ となる。

証明　$X \in \mathcal{U}_\theta(A)$，$V \in \mathcal{E}_2(A)$ とする。$v \in V - \{1\}$ に対して，$K^{(p)}(C(V)) \subset O_{p'}(\theta(C_G(v))) \cap C(V)$ より $K^{(p)}(C(V)) \cap X \subset O_{p'}(\theta(C_G(v))) \cap C_X(v) \lhd C_X(v)$。ゆえに $K^{(p)}(C(V)) \cap X \subset O_{p'}(\theta(C_G(v))) \cap C_X(v) \subset O_{p'}(C_X(v))$ が成り立つ。補題2.9より

$$K^{(p)}(C(V)) \cap X \subset \bigcap_{v \in V - \{1\}} O_{p'}(C_X(v)) \subset O_{p'}(X) \qquad (\ast)$$

$\theta^{(p)}$ の定義より $\theta(C_G(a)) \cap K^{(p)}(C_G(V)) \subset O_{p'}(\theta(C(a)))$，従って $\theta^{(p)}(C_G(a)) \subset O_{p'}(\theta(C_G(a)))$。ゆえに $a \in A - \{1\}$ に対して $\theta^{(p)}(C_G(a))$ は可解 A-不変 p'-部分群となる。$V, V_1 \in \mathcal{E}_2(A)$ とする。$v_1 \in V_1 - \{1\}$ に対して $K^{(p)}(C(V)) \cap C(V_1) \in \mathcal{U}_\theta(A)$ より $K^{(p)}(C(V)) \cap C(V_1) \subset \theta(C_G(v_1))$，$(\ast)$ において $X = \theta(C_G(v_1))$ とおけば $K^{(p)}(C(V)) \cap C(V_1) \subset K^{(p)}(C(V)) \cap \theta(C_G(v_1)) \subset O_{p'}(\theta(C_G(v_1)))$ となる。従って

$$K^{(p)}(C(V)) \cap C_G(V_1) \subset \bigcap_{v_1 \in V_1 - \{1\}} O_{p'}(\theta(C_G(v_1))) = K^{(p)}(C(V_1)) \qquad (5.3)$$

となる。

$\langle a \rangle \neq \langle a' \rangle$ となる $a, a' \in A - \{1\}$ を固定する。$A = \langle a \rangle \times A_1$, $a' \in A_1$ とする。$X = \theta(C_G(a))$ とおく。$a_1 \in A_1 - \{1\}$ に対して $K^{(p)}(C_X(a_1)) = K^{(p)}(C_G(\langle a_1, a \rangle)$ と定義する。すると, $K^{(p)}(C_X(a_1)) \in \mathcal{U}_{C_X(a_1)}(A_1)$。$a_1, a_2 \in A_1 - \{1\}$, に対して $V = \langle a_1, a \rangle$, $V_1 = \langle a_2, a \rangle$ とおき(5.3)を適用すれば

$$K^{(p)}(C_X(a_1)) \cap C_X(a_2) \subset K^{(p)}(C_X(a_2))$$

となるから $K^{(p)}$ は A_1X 上の A_1-信号函手である。$m(A) \geqslant 4$ だから $m(A_1) \geqslant 3$, 従って補題2.11より $K^{(p)}(A_1X)$ が存在する。一方 $K^{(p)}(C_G(V)) \subset \theta(C_G(a))$ より, $\theta^{(p)}(C_G(a)) = \langle \theta(C_G(a)) \cap K^{(p)}(C(V)) \mid a \in V \in \mathcal{E}_2(A) \rangle = \langle K^{(p)}(C_G(\langle a, a_1 \rangle)) \mid a_1 \in A_1 - \{1\} \rangle = \langle K^{(p)}(C_X(a_1)) \mid a_1 \in A_1 - \{1\} \rangle$ となる。すなわち $\theta^{(p)}(C_G(a))$ は $\mathcal{U}_{K^{(p)}}(A_1)$ の極大元である。さて $\theta^{(p)}(C_G(a)) \cap C_G(a_1) \in \mathcal{U}_{K^{(p)}}(A_1)$ より

$$\theta^{(p)}(C_G(a)) \cap C_G(a_1) \subset K^{(p)}(C_X(a_1)) = K^{(p)}(C_G(\langle a, a_1 \rangle)) \subset \theta^{(p)}(C_G(a_1))$$

が $\langle a \rangle \neq \langle a_1 \rangle$ のとき成立する。$\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle$ のときこの関係式は自明である。従って $\theta^{(p)}$ は G 上の可解 A-信号函手である。$p \in \pi(\theta) - \pi(\theta^{(p)})$ より $|\pi(\theta^{(p)})| < |\pi(\theta)|$ が得られる。

補題 5.4　すべての $V \in \mathcal{E}_2(A)$, $p \in \pi(\theta)$ に対して $K^{(p)}(C_G(V)) = \{1\}$ となる。

証明　補題 5.2 によって $\theta^{(p)}$ は完全である。すべての $p \in$

$\pi(\theta)$ に対して $\theta^{(p)}(G)=\{1\}$ を示そう。定義より,

$$K^{(p)}(C_G(V)) \subset \bigcap_{v\in V-\{1\}} \theta^{(p)}(C_G(v)) = \theta^{(p)}(C_G(V)) \qquad (\ast)$$

しかし補題5.2の証明より $v\in V-\{1\}$ に対して $\theta^{(p)}(C_G(v))\subset O_{p'}(\theta(C_G(v)))$ が成立するのであった。ゆえに $\bigcap_{v\in V-\{1\}}\theta^{(p)}(C_G(v))\subset\bigcap_{v\in V-\{1\}}O_{p'}(\theta(C_G(v)))=K^{(p)}(C_G(V))$。$(\ast)$ より $\theta^{(p)}(C_G(V))=K^{(p)}(C_G(V))\lhd\theta(C_G(V))$ が得られる。

$B\in\mathcal{E}_3(A)$ とする。補題2.1より $\theta^{(p)}(G)=\langle\theta^{(p)}(G)\cap C_G(V)\mid V\in\mathcal{E}_2(B)\rangle$ であるが, $\theta^{(p)}(G)\cap C_G(V)\in\mathcal{U}_{\theta^{(p)}}(A)$ より $\theta^{(p)}(G)\cap C_G(V)\subset\theta^{(p)}(C_G(V))$, 従って $\theta^{(p)}(G)=\langle\theta^{(p)}(C_G(V))\mid V\in\mathcal{E}_2(B)\rangle$。$\theta^{(p)}(C_G(V))\lhd\theta(C_G(V))$ かつ $\theta(C_G(B))\subset\theta(C_G(V))$ より $[\theta(C_G(B)),\theta^{(p)}(C_G(V))]\subset\theta^{(p)}(C_G(V))$ が $V\in\mathcal{E}_2(B)$ について成立する。ゆえに $[\theta(C_G(B)),\theta^{(p)}(G)]\subset\theta^{(p)}(G)$ がすべての $B\in\mathcal{E}_3(A)$ に対して成立する。$a\in A-\{1\}$ とすると $m(A)\geqq 4$ および補題2.5より $\theta(C_G(a))=\langle\theta(C_G(a))\cap C_G(B)\mid B\in\mathcal{E}_3(A)\rangle=\langle\theta(C_G(a))\cap\theta(C_G(B))\mid B\in\mathcal{E}_3(A)\rangle$。従って上に述べたことより, $[\theta(C_G(a)),\theta^{(p)}(G)]\subset\theta^{(p)}(G)\in\mathcal{U}_\theta(A)$。$\theta^{(p)}(G)\neq\{1\}$ とすれば, θ が局所完全であることから $\theta(C_G(a))\subset\theta(N_G(\theta^{(p)}(G)))$, ゆえに, $\langle\theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle\subset\theta(N_G(\theta^{(p)}(G)))\in\mathcal{U}_\theta(A)$, よって $\langle\theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle\in\mathcal{U}_\theta(A)$ となるので $\theta(G)$ が存在することになって矛盾を生ずる。故に $\theta^{(p)}(G)=\{1\}$ である。$\theta^{(p)}$ は完全なので $a\in A-\{1\}$ に対して $\theta^{(p)}(C_G(a))=\{1\}$, 従って, $K^{(p)}(C_G(V))=\{1\}$ が証明されたことになる。

さて次の補題を示すことによって我々の主定理の証明は完成される。

補題 5.5　$\theta(G)$ が存在する。

証明　はじめに $\pi(\theta)=\{p\}$ としよう。すると $\pi(\theta(C(A)))=\{p\}$ である。$\theta(C(A))\subset P\in \mathcal{U}^*_\theta(A;p)$ とする。定理 3.1 より $\mathcal{U}^*_\theta(A;p)=\{P\}$。$\pi(\theta(C_G(a)))=\{p\}$ がすべての $a\in A-\{1\}$ について成立するから $\langle \theta(C_G(a))\mid a\in A-\{1\}\rangle\subset P$，従って $\theta(G)=P$ となる。故に $\pi(\theta)\ni p,q,\ q\neq p$，と仮定してよい。

$P\in \mathcal{U}^*_\theta(A;p)$，$Q\in \mathcal{U}^*_\theta(A;q)$，とし Z_p，Z_q を各々 $Z(P)$，$Z(Q)$ の極小 A-不変部分群とする。$B_p=C_A(Z_p)$，$B_q=C_A(Z_q)$ とおけば A/B_p，A/B_q は巡回群である。$m(A)\geqq 3$ より $B_p\cap B_q\neq\{1\}$。$b\in B_p\cap B_q-\{1\}$ とすれば $[b,\langle Z_p,Z_q\rangle]=\{1\}$，$Z_p,Z_q\in \mathcal{U}_\theta(A)$ より $Z_p,Z_q\subset\theta(C_G(b))$．さらに $\theta(C_G(b))$ は可解群なので $V\in \mathcal{U}^*_{\theta(C_G(b))}(A;p,q)$ が存在して $V\supset Z_p$ としてよく V のあるシロー q-部分群は A-不変なので $\mathcal{U}_\theta(A;q)$ の元である。従って定理 3.1 より $x\in\theta(C_G(A))$ が存在して $\pi(\langle Z_p,Z_q^x\rangle)=\{p,q\}$ かつ $\theta(C_G(b))\supset\langle Z_p,Z_q^x\rangle$ となる。Q を Q^x でおきかえることによって $\langle Z_p,Z_q\rangle\in \mathcal{U}_\theta(A;p,q)$ と仮定してよい。さらに $\langle Z_p,Z_q\rangle\subset H\in \mathcal{U}^*_\theta(A;p,q)$ とする。

$O_p(H)=\{1\}$ と仮定しよう。すると $C_H(O_q(H))\subset O_q(H)$ である。Q_1 を $O_q(H)$ の AZ_p-不変部分群で $[Q_1,Z_p]\neq\{1\}$ となる極小の

ものとする。$[AZ_p,[Q_1,Z_p]]\subset[Q_1,Z_p]$ より Q_1 の極小性によって $Q_1=[Q_1,Z_p]$。一方 $A=\Omega_1(A)=\langle a\rangle\times B_p$，$[a,Z_p]=Z_p$。従って $B_p=Z(AZ_p)$。$m(A)\geqq 4$ より $m(B_p)\geqq 3$。$V\in\mathcal{E}_2(B_p)$ に対して $[AZ_p,C_{Q_1}(V)]\subset C_{Q_1}(V)$。補題 2.5 より $Q_1=\langle C_{Q_1}(V)\mid V\in\mathcal{E}_2(B_p)\rangle$。従って Q_1 のえらび方より $Q_1=C_{Q_1}(V)$ がある $V\in\mathcal{E}_2(B_p)$ に対して成立する。$v\in V-\{1\}$ とする。$Z_pQ_1\subset H\in\mathcal{U}^*_\theta(A;p,q)$ より $Z_pQ_1\subset\theta(C_G(v))$，さらに $Z_p\subset Z(P)\cap C_P(v)$。$P\in\mathcal{U}^*_\theta(A;p)$ より補題3.2 によって Z_p は可解群 $\theta(C_G(v))$ のあるシロー p-部分群の中心に含まれる。従って，ホール－ヒグマンの補題によって $Z_p\subset O_{p',p}(\theta(C_G(v)))$，ゆえに $Q_1=[Z_p,Q_1]\subset O_{p',p}(\theta(C_G(v)))$。すなわち，$Q_1\subset O_{p'}(\theta(C_G(v)))$ がすべての $v\in V-\{1\}$ に対して成立する。よって $K^{(p)}(C_G(V))\neq\{1\}$ となり補題 5.4 に矛盾する。

$O_p(H)\neq\{1\}\neq O_q(H)$ とする。K_p，K_q を各々 $O_p(H)$，$O_q(H)$ の極小 A-不変部分群とする。すると，$m(A/C_A(K_p))=m(A/C_A(K_q))=1$。$V=C_A(K_p)\cap C_A(K_q)$ とおくと $m(A)\geqq 4$ より $m(V)\geqq 2$。$K_p\times K_q\subset H\in\mathcal{U}_\theta(A)$，従って $v\in V-\{1\}$ に対して $K_p\times K_q\subset\theta(C_G(v))$。$K_p\times K_q\subset H_v\in\mathcal{U}^*_{\theta(C_G(v))}(A;p,q)$ とする。$H_v\subset\widehat{H_v}\in\mathcal{U}^*_\theta(A;p,q)$ とする。$K_p\times K_q\subset O_p(H)\times O_q(H)=F(H)$ だから定理 4.4 より $x\in\theta(C_G(A))$ が存在して $\widehat{H}_v^{\,x}=H$ となる。とくに H は $\theta(C(v))$ のあるシロー q-部分群 Q_v を含む。$v\in V-\{1\}$ に対して Q_v は $O_p(H)\cap C(v)$ を正規化するから補題 2.8 より $K_p\subset O_p(H)\cap$

$C_G(v) \subset O_{g'}(\theta(C_G(v)))$。 $m(V) \geq 2$ だから再び補題5.4に矛盾する。

従って"信号函手定理＝主定理"が証明されたことになる。

後記　XをGのA－不変な部分群とし，すべての$a \in A-\{1\}$に対して$\theta(C_G(a)) = C_X(a)$と定義すればθはA－信号函手の条件を満足する。

主定理の応用としては，ゴレンシュテインとハラダによる交代群A_8, A_9, A_{10}, A_{11}，ヤンコ群J_2, J_3のシロー2-部分群からの特徴づけ，ゴルドシュミットによる弱埋没2-局所部分群を含む有限単純群の分類などがある。

III．テッツ単純群の特徴づけ（パロット）

テッツはアナルズに発表した彼の論文でリイ群$^2F_4(2)$は単純ではないが指数2の正規部分群として単純群$\mathfrak{J}$を含むことを示した。これをテッツの単純群とよぶ。$\mathfrak{J}$は位数$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$であり，トンプソンの意味でN－群でもあることが知られている。さて我々は$\mathfrak{J}$を位数2の元の中心化群によって特徴づけよう。すなわち，パロットによる次の定理を証明する。

定理　Gを偶数位数の有限群，zをGの位数2の元とする。$H=C_G(z)$ が次の性質をもつと仮定する。

a)　$J=O_2(H)$ とおけば $|J|=2^9$，さらにJの巾零クラスは3以上である。

b)　H/J は位数 20 のフロベニウス群と同型。

c)　Hのシロー 5-部分群Pに対して $C_J(P)\subset Z(J)$ 。

d)　Hのシロー 2-部分群はテッツ群$\mathfrak{T}$のシロー 2-部分群と同型。

すると次の 1) 又は 2) が成立する。

1)　$G=H\,O(G)$,

2)　$G\cong\mathfrak{T}$。

注意　パロットの論文では条件 d) は除かれているが，鈴木先生の講演では d) を付けて話された。

この種の特徴づけについては，第14回シンポジウムにおける近藤武氏の報告があるのでここであらためて記すこともないと思われるが証明方針だけを述べておこう。

$G\neq H\,O(G)$ と仮定して $G\cong\mathfrak{T}$ を示す。

第1段階　Hのシロー 2-部分群はGのシロー 2-部分群であることを示し，グラーバーマンのZ^*-定理を用いて位数2の元のフュージョンを決定する。すると，位数2の元の共役類は2個存在することがわかる。

第2段階　位数2の元のフュージョンをもとにして位数2の元の中心化群の構造を決定する。すると位数2^8の群の3次対称群による拡大になっていることがわかる。

第3段階　$|G| = 2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 13 = |\mathfrak{T}|$　を示す。

ここでは次に述べるトンプソンの位数公式が使われている。

トンプソンの位数公式：Xを有限群，Xの位数2の元が2個の共役類に分かれているとし，その代表元をδ，γとする。Xの位数2の元αに対して

$$\alpha(\alpha) = \#\{(\rho, \tau) \mid \text{順序ある組}, \ \delta\sim\rho, \ \gamma\sim\tau, \ \alpha\in\langle\rho\tau\rangle\}$$

とおく。すると

$$|X| = |C_X(\delta)|\alpha(\gamma) + |C_X(\gamma)|\alpha(\delta)。$$

第4段階　$G\cong\mathfrak{T}$，を示す。

テッツは$^2F_4(2)$の生成元と基本関係式を与えた。それを用いて$\mathfrak{T}$の生成元と基本関係式を求める。そしてGの中から$\mathfrak{T}$の生成元に対応する元をえらび$\mathfrak{T}$と同じ関係式を満足していること示す。すると$|G| = |\mathfrak{T}|$より$G\cong\mathfrak{T}$が得られる。

これでI，II，III，の報告がやっと終った。やはり詳細を知りたい者は次の文献を読破しなければいけないようである。

参考文献

I [1] Hering, On subgroups with trivial normalizer intersection, (to appear).

[2] Hering, Kantor, Seitz, Finite groups with a split BN-pair of rank 1 (to appear).

[3] Shult, On a class of doubly transitive groups, (to appear).

II [1] Goldschmidt, Solvable signalizer functors on finite groups, (to appear).

[2] Goldschmidt, 2-signalizer functors on finite groups, (to appear).

[3] Goldschmidt, Weakly embedded 2-local subgroups of finite groups, (to appear).

[4] Gorenstein, Harada, A characterization of Janko's two new simple groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 16 (1970), 331 - 406.

[5] Gorenstein, Harada, On finite groups with Sylow 2-subgroups of type A_n, $n=8, 9, 10, 11$, Math. Z., 117 (1970), 207 - 238.

III [1] Parrott, A characterization of the Tit's simple group, (to appear).

[2] Tits, Algebraic and abstract simple groups, Ann. of Math., 80 (1964), 313 - 329.

後記　ゴルドシュミットによる"信号函手定理"の応用については7月15日から北海道大学で行われた有限群論シンポジウムで近藤武氏による明解な講演があった。この集会の報告集も近く出版されるようなのであわせて参照されることを望みます。